УДК 621.77

Никулин А. В.
Галицкий Е. В.

СПЕЦИАЛИЗАЦИЯ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ ДРОБНЫХ ФАКТОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

При установлении зависимостей между факторами и откликами в математических моделях для решения задач идентификации и оптимизации в технологических исследованиях широко используются результаты, полученные на основе методов теории планирования экспериментов. Смысл планирования экспериментов – выбор количества опытов и условий их проведения так, чтобы получить наибольшую информацию об объекте исследования с наименьшими затратами труда и представить эту информацию в удобной форме [1].

Выбор плана эксперимента зависит от выбранного вида аппроксимирующих функций и производится априорно. Ранее в работах [1–3] рассматривалось планирование, проведение и обработка данных полных факторных экспериментов (ПФЭ), реализация композиционных планов. Практика показывает, что априорный выбор планов полных факторных экспериментов (ПФЭ) приводит к избыточности по количеству опытов, если взаимодействия высоких порядков $x_i x_j \ldots x_k$ факторов x_i оказываются незначимыми. В результате представляется возможным сократить планы в несколько раз, если перейти к использованию планов дробных факторных экспериментов (ДФЭ).

Целью работы является обоснование целесообразности и адекватности выбора плана эксперимента в зависимости от практически обоснованного вида модели функций отклика, так как трудоемкость и материальные затраты эмпирического исследования зависят от количества опытов N.

Коэффициенты выбранной модели устанавливаются при обработке данных из таблицы эксперимента по методу наименьших квадратов. Использование различающихся планов приводит к отличиям в математических описаниях построенных моделей. Если влияние некоторого взаимодействия факторов пренебрежимо мало, то соответствующий столбец план-матрицы эксперимента можно использовать для оценки влияния нового фактора. Осуществляется переход к плану ДФЭ, для обозначения плана применяется запись 2^{n-k}, где n – общее количество факторов , k – количество взаимодействий, замененных факторами [4? 5]. Предполагается, что, пользуясь накопленным опытом прикладных исследований, можно предложить для идентификации более рациональные полилинейные модели (отбросив малозначимые взаимодействия). В результате сокращаются планы и, соответственно, упрощается проведение экспериментов. Например, при исследованиях процессов продольной прокатки широкое распространение получили модели в виде степенных функций факторов. На основании анализа результатов экспериментов предлагается ограничиться моделями, учитывающими влияние факторов и их парных взаимодействий:

$$y = a_0 + \sum_i a_i x_i + \sum_{i \neq j} a_{ij} x_i x_j \,, \tag{1}$$

где a_0, a_i, a_{ij} – коэффициенты модели, которые необходимо определить;

$i, j = 1,2,\ldots,n$.

Далее рассматривается влияние такой профильной специализации моделей на планы факторных экспериментов и результаты их проведения. В начале следует определиться с количеством опытов без учета их кратности. При выборе и использовании модели (1) количество определяемых коэффициентов $m = 0{,}5\left(n^2 + n + 2\right)$ должно коррелировать с количеством узловых точек плана эксперимента $N = 2^{n-k}$. Для того, чтобы модель (1) была заведомо определена, необходимо выполнение условия $m \le N$, приводящего к неравенству:

$$k \le n + 1 - \log_2\left(n^2 + n + 2\right) \qquad (2)$$

для дробности k плана эксперимента ($k = 0$ – ПФЭ; $k = 1, 2,\ldots;\ n-1$ – ДФЭ).

Если при выборе плана рассматривать количество учитываемых факторов n в качестве переменной, то получается табл. 1 допустимых планов.

Таблица 1
Выбор планов для моделей, учитывающих действие факторов и их парных взаимодействий

Количество факторов	Количество коэффициентов	Допустимые планы	Количество узловых точек
2	4	ПФЭ 2^2	4
3	7	ПФЭ 2^3	8
4	11	ПФЭ 2^4	16
5	16	ДФЭ 2^{5-1}	16
		ПФЭ 2^5	32
6	22	ДФЭ 2^{6-1}	32
		ПФЭ 2^6	64
7	29	ДФЭ 2^{7-2}	32
		ДФЭ 2^{7-1}	64
		ПФЭ 2^7	128

Можно отметить, что при $n \le 4$ для идентификации модели с учетом всех парных взаимодействий необходимо планировать полные факторные эксперименты. При $n = 5$ или $n = 6$ можно использовать полуреплики ДФЭ 2^{n-1}, а при $n \ge 7$ можно перейти к четвертьрепликам ДФЭ 2^{n-2}. Следовательно, начиная с $n = 5$, при увеличении количества факторов становится возможным переход к дробным планам с сокращением количества опытов N в два и более раз по сравнению с ПФЭ (рис. 1).

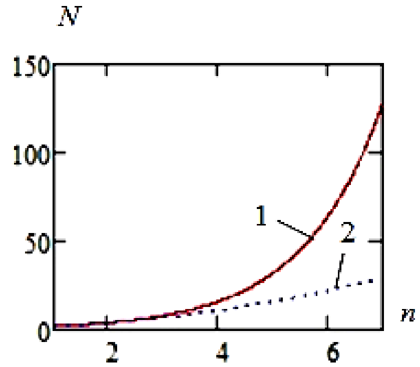

Рис. 1. Сокращение N (1 – ПФЭ; 2 – ДФЭ)

Если же значимы не все из возможных парных взаимодействий, то применять дробные планы рационально, начиная с $n = 4$. Однако следует обратить внимание на то, что при $n > 8$ модель становится слишком сложной (более 30 слагаемых) и плохо приспособленной для последующего анализа исследователем. Поэтому следует переориентироваться на декомпозицию планов, приводящую в каждом частном случае к уменьшению количества учитываемых факторов и упрощению модели [6].

Если при обработке полученных при проведении эксперимента данных выясняется необходимость дополнения плана, то ДФЭ легко достраивается до плана полного факторного эксперимента. Далее при необходимости перехода к квадратичным моделям вида $y = a_0 + \sum_i a_i x_i + \sum_{i \neq j} a_{ij} x_i x_j + \sum_i a_{ii} x_i^2$, возможно композиционное планирование.

С целью получения оценок точности предложенный подход рассматривается на примере вычислительного эксперимента по данным ранее проведенного конкретного исследования [6]. Для изучения закономерностей формоизменения при прокатке фасонных профилей широко используются спланированные для полиномиальных моделей многофакторные эксперименты. С ориентацией на расчеты калибровок валков изучаются закономерности процессов деформации. В частности, при исследовании закономерностей деформирования заготовки из круглой стали диаметром d в низкотавровом калибре высотой H_1 для четырех факторов:

$$m_1 = \frac{d}{H_1}; \quad m_2 = \frac{h_1}{H_1}; \quad m_3 = \frac{B_1}{H_1}; \quad m_4 = \frac{D_{ср}}{H_1},$$

где $d, h_1, H_1, B_1, D_{ср}$ – параметры заготовки, полосы, калибра и стана производится переход к безразмерным кодированным переменным $x_i = \frac{m_i - m_{i0}}{0,5\delta m_i}$, где:

$$m_{i0} = 0,5\left(m_{iв} + m_{iн}\right); \quad \delta m_i = m_{iв} - m_{iн}$$

определяются по верхнему и нижнему уровням факторов. Для полиномиальных моделей вида:

$$y_j = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + \ldots,$$

идентифицирующих показатель уширения $y_1 = \frac{\Delta B}{\Delta h}$ и коэффициент вытяжки $y_2 = \lambda$ выбраны планы дробного 2^{4-1} и полного 2^4 факторного экспериментов.

По план-матрице дробного факторного эксперимента с определяющим контрастом $x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$ получены модели:

$$y_1 = 0,5207 + 0,1106x_1 - 0,0243x_2 - 0,0230x_3 + 0,0316x_4;$$
$$y_2 = 1,470 + 0,195x_1 - 0,0558x_2 - 0,0242x_3 + 0,01503x_4. \quad (3)$$

По план-матрице полного факторного эксперимента 2^4 получены модели:

$$y_1^* = 0,5224 + 0,1055x_1 - 0,0316x_2 - 0,0209x_3 + 0,0359x_4 - 0,0476x_1x_2 + 0,0238x_2x_3;$$
$$y_2^* = 1,476 + 0,2026x_1 - 0,0451x_2 - 0,0174x_3 - 0,0166x_4. \quad (4)$$

Сравнение экспериментальных данных, полученных в контрольных точках области допустимых значений, с соответствующими расчетными по представленным формулам с привлечением статистического анализа показало адекватность моделей. Заметных отличий в результатах полного и дробного факторных экспериментов не установлено (табл. 2).

Так, например, средние выборочные значения (табл.2): $\bar{y}_1 = 0,521$ и $\bar{y}_1^* = 0,522$; $\bar{y}_2 = 1,47$ и $\bar{y}_2^* = 1,476$. Средние квадратические отклонения для полученных выборок, соответственно, $S_{y_1} = 0,084$ и $S_{y_1^*} = 0,083$; $S_{y_2} = 0,1449$ и $S_{y_2^*} = 0,1477$. Аналогичные результаты получаются и для других случаев. Следовательно, экспериментальные исследования формоизменения целесообразно начинать по дробным планам.

Таблица 2

Сравнение расчетных данных для моделей (3) и (4)

№	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_1^*	y_2^*
1	–1,414	0	0	0	0,364	1,194	0,373	1,189
2	1,414	0	0	0	0,677	1,746	0,672	1,762
3	0	–1,414	0	0	0,555	1,549	0,567	1,540
4	0	1,414	0	0	0,486	1,391	0,478	1,412
5	0	0	–1,414	0	0,553	1,504	0,552	1,501
6	0	0	1,414	0	0,488	1,436	0,493	1,452
7	0	0	0	–1,414	0,476	1,491	0,472	1,499
8	0	0	0	1,414	0,565	1,449	0,573	1,453
9	0	0	0	0	0,521	1,470	0,522	1,476

Известно, что исследование формоизменения при прокатке на выбранном стане большого количества фасонных профилей рациональнее производить по группам с выделением базового профиля (калибра). Это позволяет осуществить декомпозицию планов экспериментов со значительным уменьшением их количества [6]. Для обоснования адекватности получающихся моделей также необходимо привлекать методы статистического анализа.

ВЫВОДЫ

Выбранный план эксперимента с учетом формул кодирования переменных определяет условия проведения опытов и, в основном, вид зависимостей для идентифицируемой модели. Использование накопленного опыта исследований в области теории и моделирования прокатки фасонных профилей приводит к специализации дробного планирования экспериментов. С учетом ограничения значимости взаимодействий факторов парными $x_i x_j$ производится выбор планов дробных экспериментов формулы 2^{n-k}. При количестве факторов четыре и более рационально использовать полу- или четвертьреплики. Количество опытов в плане эксперимента снижается в два или четыре раза, оценки точности модели не изменяются.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Солодов В. С. Применение метода активного планирования экспериментов для идентификации судового комплекса / В. С. Солодов, Ю. И. Юдин // Вестник МГТУ. – 2006. – Т. 9, №2. – С. 187–190.*
2. *Нечаев К. Н. Повышение эффективности процессов обработки металлов на основе методов теории планирования многофакторных экспериментов / К. Н. Нечаев // Металлообработка. – 2003. – № 1 (13). – С. 3–5.*
3. *Дослідження формозмінення при прокатці таврових профілів з масивною стінкою / Є. В. Галицький, М. К. Ізмайлова, Р. Я. Романюк, М. В. Цабенко // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету : (технічні науки). – Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2010. – Вип. 1 (14). – С. 64–69.*
4. *Советов Б. Я. Моделирование систем / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 2001. – 343 с.*
5. *Ермаков С. М. Математическая теория оптимального эксперимента / С. М. Ермаков, А. А. Жиглявский. – М. : Наука, 1987. – 320 с.*
6. *Галицкий Е. В. Геометрический анализ вытяжной способности калибров / Е. В. Галицкий, А. В. Никулин // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету : (технічні науки) / Дніпродзержинськ : ДДТУ. – 2008. – С. 68–72.*

Никулин А. В. – канд. техн. наук, доц. ДГТУ;

Галицкий Е. В. – канд. техн. наук, доц. ДГТУ.

ДГТУ – Днепродзержинский государственный технический университет, г. Днепродзержинск.

E-vail: r22roma@mail.ru